EXACT and THRESHOLD

July 21, 2013

読んだ論文

Andris Ambanis, Janis Iraids, Juris Smotrovs :
"Exact quantum query complexity of EXACT and THRESHOLD" (2013)

1. n bit 列 $x = x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ の内, 1 である個数を数えるアルゴリズム

1. n bit 列 $x = x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ の内, 1 である個数を数えるアルゴリズム
2. 厳密アルゴリズムです

用いる正規直交基底

$$|0\rangle\,|1\rangle\ldots|n\rangle\,(|i\rangle \equiv |i,i\rangle)$$

$$|i,j\rangle\,(i<j)$$

$2n$ qubit 程度が必要

EXACT

n bit 列 $x_0 \ldots x_{n-1}$ の内, ちょうど k コが 1 であるかの判定

$$EXACT_k^n : \{0,1\}^n \to \{true, false\}$$

量子計算における EXACT のアルゴリズムの最小のクエリ計算量を考える.

$$Q_E(EXACT_k^n)$$

Theorem

$Q_E(EXACT_k^{2k}) \leq k$

$\sum_i \hat{x}_i == 0$ であることを利用してアルゴリズムを作る.
ここで,

$$\hat{x}_i \equiv (-1)^{x_i} \,;\, x_i \in \{0,1\} \rightarrow \hat{x}_i \in \{-1,1\}$$

$EXACT_k^{2k}$

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2 are unitary

$EXACT_k^{2k}$

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2 are unitary

1. $|\varphi_3\rangle$ を測定し，運が良ければ即座に計算終了 ($Q_E(EXACT_k^{2k}) = 1$)

$EXACT_k^{2k}$

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2 are unitary

1. $|\varphi_3\rangle$ を測定し，運が良ければ即座に計算終了 ($Q_E(EXACT_k^{2k}) = 1$)
2. さもなくば, $EXACT_{k-1}^{2k-2}$ を再帰的に呼び出す.

$EXACT_k^{2k}$

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2 are unitary

1. $|\varphi_3\rangle$ を測定し，運が良ければ即座に計算終了 ($Q_E(EXACT_k^{2k}) = 1$)
2. さもなくば, $EXACT_{k-1}^{2k-2}$ を再帰的に呼び出す.
3. 再帰の基底： $EXACT_0^0 = true$

def operators

$$
\begin{aligned}
U_1 |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{i=0}^{2k-1} |i\rangle \\
Q |i\rangle &\rightarrow \hat{x}_i |i\rangle \text{ ; query} \\
U_2 |i\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\sum_{j>i} |i, j\rangle - \sum_{j<i} |j, i\rangle + |0\rangle \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &\xrightarrow{U_1} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{i=0}^{2k-1} |i\rangle \\
&\xrightarrow{Q} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{i=0}^{2k-1} \hat{x}_i \, |i\rangle \\
&\xrightarrow{U_2} \frac{1}{2k} \Big(\sum_{i<j} (\hat{x}_i - \hat{x}_j) \, |i, j\rangle + \sum_{i=0}^{2k-1} \hat{x}_i \, |0\rangle \Big) \\
\ldots \; & \; \mathit{measure}
\end{aligned}
$$

$|i,j\rangle$ $(i < j)$ もしくは $|0\rangle$ が測定される

$|i,j\rangle$ $(i<j)$ もしくは $|0\rangle$ が測定される

1. if get $|0\rangle \Rightarrow \sum_{i=0}^{2k-1} \hat{x}_i \neq 0$

   $\Rightarrow EXACT_k^{2k} = false$

$|i,j\rangle$ $(i<j)$ もしくは $|0\rangle$ が測定される

1. if get $|0\rangle \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1} \hat{x}_i \neq 0$
   $\Rightarrow EXACT_k^{2k} = false$
2. if get $|i,j\rangle \Rightarrow (\hat{x}_i - \hat{x}_j) \neq 0$
   $\Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$
   $\Rightarrow EXACT_k^{2k}(x) = EXACT_{k-1}^{2k-2}(x \setminus \{x_i, x_j\})$

$|i,j\rangle$ $(i < j)$ もしくは $|0\rangle$ が測定される

1. if get $|0\rangle \Rightarrow \sum_{i=0}^{2k-1} \hat{x}_i \neq 0$
   $\Rightarrow EXACT_k^{2k} = false$
2. if get $|i,j\rangle \Rightarrow (\hat{x}_i - \hat{x}_j) \neq 0$
   $\Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$
   $\Rightarrow EXACT_k^{2k}(x) = EXACT_{k-1}^{2k-2}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
3. たかだか k 回の Q の適用で $EXACT_k^{2k}$ は計算できる.

Theorem

$$EXACT_k^n = \max\{k, n-k\}$$

Proof.

$n-2k$ の 1 の列, $2k-n$ の 0 の列を 入力に付け足す.
$EXACT_k^n(x)$
when $n \geq 2k = EXACT_{n-k}^{2n-2k}((1\ldots1) +\!\!+ x)$
when $n < 2k = EXACT_k^{2k}((0\ldots0) +\!\!+ x)$ $\square$

THRESHOLD

長さ n の bit 列 $x_0 \ldots x_{n-1}$ の内, 少なくとも k コが 1 である, の判定

$$Th_k^n : \{0, 1\}^n \to \{true, false\}$$

$$true = 1, false = 0$$

THRESHOLD as Th

Theorem

$Q_E(Th^{2k+1}_{k+1}) \leq k+1$

$$Th^{2k+1}_{k+1} = MAJORITY_{2k+1}$$

Theorem

$Q_E(Th^{2k+1}_{k+1}) \leq k+1$

$$Th^{2k+1}_{k+1} = MAJORITY_{2k+1}$$

1. $2k+1$ 個中 $k+1$ 個以上が 1 (true)
$\Leftrightarrow$ 入力 $x_0 \dots x_{2k}$ の内, 1 のほうが多い.

Theorem

$Q_E(Th^{2k+1}_{k+1}) \leq k+1$

$$Th^{2k+1}_{k+1} = MAJORITY_{2k+1}$$

1. $2k+1$ 個中 $k+1$ 個以上が 1 (true)
   $\Leftrightarrow$ 入力 $x_0 \ldots x_{2k}$ の内, 1 のほうが多い.
2. $2k+1$ 個中 $k+1$ 個以上が 1 ではない. (false)
   $\Leftrightarrow$ 入力 $x_0 \ldots x_{2k}$ の内, 0 のほうが多い.

$x_0 \dots x_{2k}$ を, 0 か 1 かで 2 分割する.

$$S_0 = \{i | x_i = 0\} \quad (1)$$
$$S_1 = \{i | x_i = 1\} \quad (2)$$

$\#S_0 > \#S_1$ を仮定 (逆も同様なので略)

$x_0 \dots x_{2k}$ を, 0 か 1 かで 2 分割する.

$$S_0 = \{i | x_i = 0\} \quad (1)$$
$$S_1 = \{i | x_i = 1\} \quad (2)$$

$\#S_0 > \#S_1$ を仮定 (逆も同様なので略)

1. $i \in S_0$ の時
   1. $\#S_0 = \#S_1 + 1 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j = 0$
   2. $\#S_0 \geq \#S_1 + 3 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j \neq 0$

      $\Rightarrow Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$

$x_0 \ldots x_{2k}$ を, 0 か 1 かで 2 分割する.

$$S_0 = \{i | x_i = 0\} \quad (1)$$
$$S_1 = \{i | x_i = 1\} \quad (2)$$

$\#S_0 > \#S_1$ を仮定 (逆も同様なので略)

1. $i \in S_0$ の時
   1. $\#S_0 = \#S_1 + 1 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j = 0$
   2. $\#S_0 \geq \#S_1 + 3 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j \neq 0$

      $\Rightarrow Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
2. $i \in S_1$ の時

$$Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$$

$x_0 \dots x_{2k}$ を, 0 か 1 かで 2 分割する.

$$\begin{aligned} S_0 &= \{i | x_i = 0\} && (1) \\ S_1 &= \{i | x_i = 1\} && (2) \end{aligned}$$

$\#S_0 > \#S_1$ を仮定 (逆も同様なので略)

1. $i \in S_0$ の時
   1. $\#S_0 = \#S_1 + 1 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j = 0$
   2. $\#S_0 \geq \#S_1 + 3 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_j \neq 0$

      $\Rightarrow Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
2. $i \in S_1$ の時

$$Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$$

3. この事実を少しあとで使う

アルゴリズムは EXACT と大体同じ

Th^{2k+1}_{k+1}

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2'} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2' are unitary

U_1 , Q は EXACT のと同じ.

アルゴリズムは EXACT と大体同じ

Th^{2k+1}_{k+1}

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U_2'} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U_2' are unitary

U_1 , Q は EXACT のと同じ.

1. $|\varphi_3\rangle$ を測定して, Th^{2k-1}_{k-1} を再帰的に実行.

アルゴリズムは EXACT と大体同じ

Th^{2k+1}_{k+1}

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} |\varphi_1\rangle \xrightarrow{Q} |\varphi_2\rangle \xrightarrow{U'_2} |\varphi_3\rangle$$

where U_1 and U'_2 are unitary

U_1 , Q は EXACT のと同じ.

1. $|\varphi_3\rangle$ を測定して, Th^{2k-1}_{k-1} を再帰的に実行.
2. $Th^1_0 = true$

def operators

$$
\begin{aligned}
U_1 |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sum_{i=0}^{2k} |i\rangle \\
Q |i\rangle &\rightarrow \hat{x}_i |i\rangle \\
U_2' |i\rangle &\rightarrow \frac{\sqrt{2k-1}}{2k} \Big(\sum_{j>i} |i, j\rangle - \sum_{j<i} |j, i\rangle \Big) + \frac{1}{2k} \sum_{j \neq i} |j\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|0\rangle \quad &\xrightarrow{U_1} \quad \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sum_{i=0}^{2k} |i\rangle \\
&\xrightarrow{Q} \quad \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sum_{i=0}^{2k} \hat{x}_i \, |i\rangle \\
&\xrightarrow{U_1} \quad \frac{\sqrt{2k-1}}{2k\sqrt{2k+1}} \sum_{i<j} (\hat{x}_j - \hat{x}_i) \, |i,j\rangle + \frac{1}{2k\sqrt{2k+1}} \sum_{i=0}^{2k} \sum_{j \neq i} \hat{x}_i \, |j\rangle
\end{aligned}
$$

これを測定すると, $|i,j\rangle$ 若しくは, $|j\rangle$ を得る.

1. if get $|i,j\rangle \Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$
   $\Rightarrow Th_{k+1}^{2k+1}(x) = Th_{k-1}^{2k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$

1. if get $|i, j\rangle \Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$
   $\Rightarrow Th_{k+1}^{2k+1}(x) = Th_{k-1}^{2k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
2. if get $|j\rangle \Rightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_i \neq 0$
   $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \forall i.\ Th_{k+1}^{2k+1}(x) = Th_{k-1}^{2k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$

1. if get $|i,j\rangle \Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$
   $\Rightarrow Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
2. if get $|j\rangle \Rightarrow \sum_{j \neq i} \hat{x}_i \neq 0$
   $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \forall i.\ Th^{2k+1}_{k+1}(x) = Th^{2k-1}_{k-1}(x \setminus \{x_i, x_j\})$
3. k+1 回の Q の適用で Th^{2k+1}_{k+1} が計算できる.

Theorem

$$Th_k^n = \max\{k, n - k + 1\}$$

Proof.

EXACT と同じ $\square$

参考文献

1. "量子コンピュータと量子通信 I" Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang 共著
2. Andris Ambanis, Janis Iraids, Juris Smotrovs : "Exact quantum query complexity of EXACT and THRESHOLD" (2013)

補足

U_2 のユニタリー性

$$\langle i| U_2^\dagger U_2 |i\rangle = \sum_{j>i} \frac{1}{2k} \langle i,j|i,j\rangle + \sum_{j<i} \frac{1}{2k} \langle j,i|j,i\rangle + \frac{1}{2k} \langle 0|0\rangle = 1$$

$$\langle j| U_2^\dagger U_2 |i\rangle = -\frac{1}{2k} \langle j,i|j,i\rangle - \frac{1}{2k} \langle i,j|i,j\rangle + \frac{1}{2k} \langle 0|0\rangle = 0$$

U_2' のユニタリー性

$$
\begin{aligned}
\langle i|\, U_2'^{\dagger} U_2' \,|i\rangle &= \sum_{j>i} \frac{2k-1}{4k^2} \langle i,j|i,j\rangle + \sum_{j<i} \frac{2k-1}{4k^2} \langle j,i|j,i\rangle \\
&\quad + \sum_{j\neq i} \frac{1}{4k^2} \langle j|j\rangle \\
&= -\frac{2k-1}{4k^2} \times 2k + \frac{1}{4k^2} \times 2k \\
&= 1
\end{aligned}
$$

U_2' のユニタリー性 (続き)

$$\begin{aligned}
\langle j| U_2'^{\dagger} U_2' |i\rangle &= -\sum_{i<j} \frac{2k-1}{4k^2} \langle i,j|i,j\rangle - \sum_{i>j} \frac{2k-1}{4k^2} \langle j,i|j,i\rangle \\
&\quad + \sum_{m\neq i \mathrm{and} m\neq j} \frac{1}{4k^2} \langle m|m\rangle \\
&= -\frac{2k-1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2} \times (2k-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$