apply EXACT algorithm

枚方

July 26, 2013

今日 話すこと

前回読んだ論文の, 量子アルゴリズム EXACT,
THRESHOLD をヒントにした量子アルゴリズムを考案

1. $PARITY^n$: 入力 n bit のうち 1 が奇数個か偶数個かを返す

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rightarrow \{odd, even\} \quad (x_i \in \{0, 1\})$$

1. $PARITY^n$：入力 n bit のうち 1 が奇数個か偶数個かを返す

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{odd, even\} \quad (x_i \in \{0, 1\})$$

2. クエリ計算量が、$n/2$

アルゴリズムの概要

用いる正規直交基底

$$
\begin{aligned}
|0\rangle\,|1\rangle\,|2\rangle \ldots |n\rangle \quad & (|i\rangle \equiv |i,i\rangle) \\
|i,j\rangle \quad & (1 \leq i < j \leq n) \\
|j,i\rangle \quad & (1 \leq i < j \leq n)
\end{aligned}
$$

$2\log_2(n)$ qubit 程度 必要

def of operators

用いる操作は以下の３つ

$$
\begin{aligned}
U_1 |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |i\rangle \\
Q |i\rangle &= \hat{x}_i |i\rangle \\
U_2 |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \Big(\sum_{j<i} |j,i\rangle - \sum_{j>i} |i,j\rangle + \sum_{j>i} |j,i\rangle + \sum_{j<i} |i,j\rangle \Big)
\end{aligned}
$$

where
$\hat{x}_i = (-1)^{x_i} \quad (x_i \in \{0,1\})$
Q is query.
U_1 and U_2 are unitary.

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &\xrightarrow{U_1} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}|i\rangle \\
&\xrightarrow{Q} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\,|i\rangle \\
&\xrightarrow{U_2} \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}\Big(\sum_{i<j}(\hat{x}_i-\hat{x}_j)\,|i,j\rangle+\sum_{i<j}(\hat{x}_i+\hat{x}_j)\,|j,i\rangle\Big) \\
&\quad \ldots measure
\end{aligned}
$$

以下, $i<j$ とする.
測定では, $|i,j\rangle$ 若しくは $|j,i\rangle$ を得る.

1. if get $|i, j\rangle$ $(i < j)$

$$\hat{x}_i - \hat{x}_j \neq 0 \Leftrightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j \Leftrightarrow x_i \neq x_j \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} = \{0, 1\}$$

1. if get $|i,j\rangle$ $(i < j)$

$$\hat{x}_i - \hat{x}_j \neq 0 \Leftrightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j \Leftrightarrow x_i \neq x_j \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} = \{0,1\}$$

2. then
   入力サイズを 2 減らす再帰呼び出し

$$\begin{aligned} & PARITY^n(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \\ = \;& not\ PARITY^{n-2}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}) \end{aligned}$$

1. if get $|i,j\rangle$ $(i < j)$

$$\hat{x}_i - \hat{x}_j \neq 0 \Leftrightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j \Leftrightarrow x_i \neq x_j \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} = \{0,1\}$$

2. then
入力サイズを 2 減らす再帰呼び出し

$$\begin{aligned} & PARITY^n(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \\ = \quad & not\ PARITY^{n-2}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}) \end{aligned}$$

3. where

$$\begin{aligned} not\ odd &= even \\ not\ even &= odd \end{aligned}$$

1. if get $|j, i\rangle$ $(i < j)$

$$\hat{x}_i + \hat{x}_j \neq 0 \Leftrightarrow x_i = x_j$$

1. if get $|j, i\rangle$ $(i < j)$

$$\hat{x}_i + \hat{x}_j \neq 0 \Leftrightarrow x_i = x_j$$

2. then

$$\begin{aligned} & PARITY^n(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \\ = \quad & PARITY^{n-2}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}) \end{aligned}$$

1. 入力サイズが 1 の時 (あるいは奇数ならいつでも)

$$PARITY^{2k+1}(x) = PARITY^{2k+2}(x \mathbin{+\!\!+} \{0\})$$

0 を付け足すことで偶数にする

1. 入力サイズが 1 の時 (あるいは奇数ならいつでも)

$$PARITY^{2k+1}(x) = PARITY^{2k+2}(x +\!\!+ \{0\})$$

   0 を付け足すことで偶数にする

2. 再帰の基底：入力サイズが 0 の時

$$PARITY^{0}(x) = even$$

Theorem

$PARITY^n$ のクエリ計算量は, $\lceil n/2 \rceil$

補足

U_2 のユニタリー性の確認

$$
\begin{aligned}
\langle i|\, U_2^\dagger U_2 \,|i\rangle &= \frac{1}{2(n-1)}\Big(\sum_{j<i} 1 - \sum_{j>i} 1 + \sum_{j>i} 1 + \sum_{j<i} 1\Big) \\
&= 1 \\
\langle i|\, U_2^\dagger U_2 \,|j\rangle &= \frac{1}{2(n-1)}\Big(-\sum_{j>i} \langle i,j|\,|i,j\rangle + \sum_{j>i} \langle j,i|\,|j,i\rangle\Big) \\
&= 0 \quad (i < j \text{ の場合})
\end{aligned}
$$

参考文献

1. "量子コンピュータと量子通信 I" Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang 共著
2. Andris Ambanis, Janis Iraids, Juris Smotrovs : "Exact quantum query complexity of EXACT and THRESHOLD" (2013)